



Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences



HOCHSCHULE
HAMM-LIPPSTADT



Beispielaufgaben

**Lösung von Beispielaufgaben mithilfe von
ChatAI sowie Verifizierung der Ergebnisse
durch Anwendung der in „Belling the Cat:
Strategies for Checking AI-Generated
Results in STEM Disciplines“ vorgestellten
Prüfstrategien**

Juni 2026

Ein Kooperationsvorhaben empfohlen durch die:



INNOVATION DURCH KOOPERATION

Gefördert durch:

Ministerium für
Kultur und Wissenschaft
des Landes Nordrhein-Westfalen



Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabe: Differentialrechnung.....	3
2. Aufgabe: Gleichung lösen.....	4
3. Aufgabe: Nichtlineare Gleichungssystem.....	5
4. Aufgabe: Balkenverschiebung unter Lastwirkung	7
5. Aufgabe: Waagerechter Wurf	11
6. Aufgabe: Flugzeuggeschwindigkeit und -beschleunigung.....	14

1. Aufgabe: Differentialrechnung

Bestimme die Ableitung der Funktion:

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7$$

1. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu lösen ist

Die Aufgabe ist leicht zu lösen, weil:

- eine naheliegende Regel (Potenzregel) verwendet werden kann
- Keine oder wenige Zwischenschritte erforderlich sind

2. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu verifizieren ist

Die Aufgabe ist leicht zu verifizieren, weil:

- Die Lösung durch ein CAS-Tool (z.B. WolframAlpha) überprüft werden kann

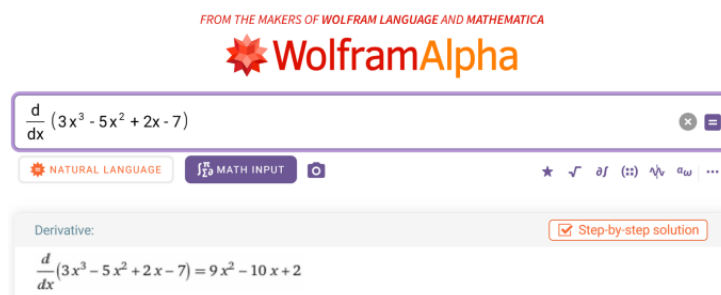
3. Schritt: Fall wählen und Schritte befolgen

Fall A: Aufgabe selbst lösen und anschließend durch CAS Tool verifizieren.

Aufgabe lösen:

$$f'(x) = 9x^2 - 10x + 2$$

Mit WolframAlpha überprüfen:



2. Aufgabe: Gleichung lösen

Löse die Gleichung: $2x^2 - 8x + 6 = 0$

1. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu lösen ist

Die Aufgabe ist leicht zu lösen, weil:

- eine naheliegende Regel (pq-Formel) verwendet werden kann
- Keine oder wenige Zwischenschritte erforderlich sind

2. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu verifizieren ist

Die Aufgabe ist leicht zu verifizieren, weil:

- Die Lösung durch ein CAS-Tool (z.B. GeoGebra) überprüft werden kann
- Die Lösung durch Regeln (Einsetzen) überprüft werden kann

3. Schritt: Fall wählen und Schritte befolgen

Fall A: Aufgabe selbst lösen und anschließend durch CAS Tool verifizieren.

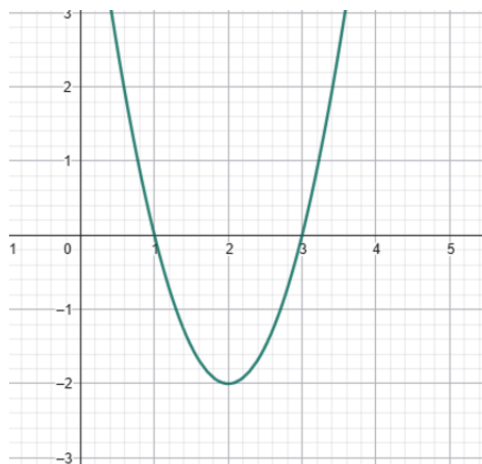
Aufgabe lösen:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 3$$

Mit Geogebra überprüfen:



3. Aufgabe: Nichtlineare Gleichungssystem

Löse das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}xy &= x \\ y &= z + 1 \\ x + y &= 5\end{aligned}$$

1. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu lösen ist

Die Aufgabe ist schwer zu lösen, weil:

- eine mehrschrittige Berechnung erforderlich ist
- Umformungen notwendig sind, bevor die eigentliche Lösung erfolgen kann

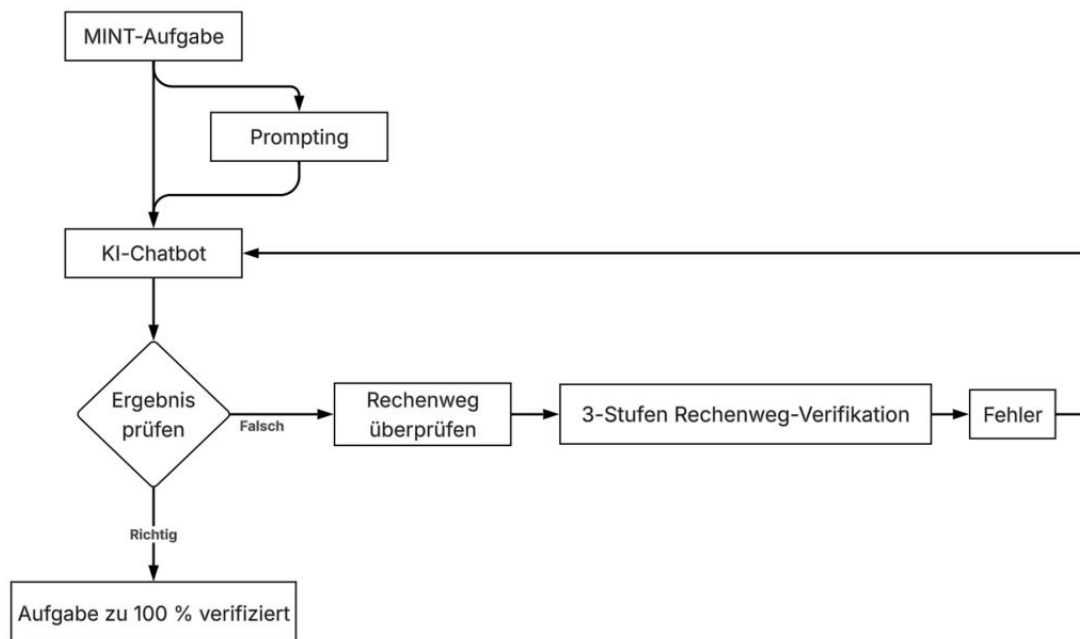
2. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu verifizieren ist

Die Aufgabe ist leicht zu verifizieren, weil:

- Die Lösung durch Regeln (Einsetzen) überprüft werden kann

3. Schritt: Fall wählen und Schritte befolgen

Fall B: Workflow befolgen



Eingabe in KI-Chatbot (Ohne Prompting):

Löse das Gleichungssystem:

$$xy=x$$

$$y=z+1$$

$$x+y=5$$

Ergebnis:

Gegebenes System

$$\begin{cases} xy = x \\ y = z + 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

1. Erste Gleichung vereinfachen

$$xy = x \implies x(y - 1) = 0$$

Damit gibt es nur zwei Möglichkeiten:

1. $x = 0$
2. $y = 1$

Wir untersuchen beide Fälle getrennt.

Fall 1: $x = 0$

- Aus $x + y = 5$ folgt
 $0 + y = 5 \implies y = 5$
- Aus $y = z + 1$ folgt
 $5 = z + 1 \implies z = 4$
- Kontrolle der ersten Gleichung:
 $xy = 0 \cdot 5 = 0 = x \quad \checkmark$

Lösung für Fall 1: $(x, y, z) = (0, 5, 4)$.

Fall 2: $y = 1$

- Aus $x + y = 5$ folgt
 $x + 1 = 5 \implies x = 4$
- Aus $y = z + 1$ folgt
 $1 = z + 1 \implies z = 0$
- Kontrolle der ersten Gleichung:
 $xy = 4 \cdot 1 = 4 = x \quad \checkmark$

Lösung für Fall 2: $(x, y, z) = (4, 1, 0)$.

Ergebnis

Das Gleichungssystem besitzt genau **zwei** reelle Lösungen:

$(x, y, z) = (0, 5, 4) \quad \text{oder} \quad (x, y, z) = (4, 1, 0)$

Durch Einsetzen überprüfen:

$$(x, y, z) = (0, 5, 4)$$

$$(x, y, z) = (4, 1, 0)$$

$$xy = x$$

$$0 \cdot 5 = 0 \quad \checkmark$$

$$4 \cdot 1 = 4 \quad \checkmark$$

$$y = z + 1$$

$$5 = 4 + 1 \quad \checkmark$$

$$1 = 0 + 1 \quad \checkmark$$

$$x + y = 5$$

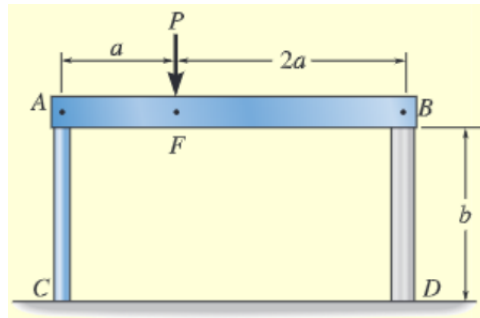
$$0 + 5 = 5 \quad \checkmark$$

$$4 + 1 = 5 \quad \checkmark$$

4. Aufgabe: Balkenverschiebung unter Lastwirkung

Der starre Balken AB ist auf zwei Pfosten, AC und BD, gelagert. AC besteht aus Stahl und hat den Durchmesser d_{st} , BD besteht aus Aluminium und hat den Durchmesser d_{al} . Bestimmen Sie die Verschiebung von Punkt F auf AB, wenn dort eine Vertikallast P angreift.

$P = 90 \text{ kN}$, $d_{st} = 20 \text{ mm}$, $d_{al} = 40 \text{ mm}$, $E_{st} = 200 \text{ GPa}$, $E_{al} = 70 \text{ GPa}$, $a = 200 \text{ mm}$, $b = 300 \text{ mm}$



Kurzlösung

$$\delta_F = -0,225 \text{ mm}$$

Quelle: Russell C. Hibbeler, Technische Mechanik 2, Festigkeitslehre, Beispiel 4.3

1. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu lösen ist

Die Aufgabe ist schwer zu lösen, weil:

- eine mehrschrittige Berechnung erforderlich ist

2. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu verifizieren ist

Die Aufgabe ist leicht zu verifizieren, weil:

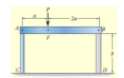
- Eine Lösung vorliegt

3. Schritt: Fall wählen und Schritte befolgen

Fall B: Workflow befolgen

Eingabe in KI-Chatbot (Ohne Prompting):

Der starre Balken AB ist auf zwei Pfosten, AC und BD, gelagert, Abbildung 4.8a. AC besteht aus Stahl und hat den Durchmesser d_{St} , BD besteht aus Aluminium und hat den Durchmesser d_{Al} . Bestimmen Sie die Verschiebung von Punkt F auf AB, wenn dort eine Vertikallast P angreift.
 $P = 90 \text{ kN}$, $d_{St} = 20 \text{ mm}$, $d_{Al} = 40 \text{ mm}$, $E_{St} = 200 \text{ GPa}$, $E_{Al} = 70 \text{ GPa}$, $a = 200 \text{ mm}$, $b = 300 \text{ mm}$



Ergebnis:

Geometrische und Materialdaten

Gegeben:

- Last: $P = 90 \text{ kN} = 90\,000 \text{ N}$
- Abstand von A zu F: $a = 200 \text{ mm} = 0.20 \text{ m}$
- Abstand von F zu B: $b = 300 \text{ mm} = 0.30 \text{ m}$
- Gesamtlänge: $L = a + b = 0.50 \text{ m}$
- Stützhöhe: $h = 2.0 \text{ m}$ (angenommen, Ergebnis skaliert linear mit h)
- Stahlstift AC: Durchmesser $d_{St} = 20 \text{ mm}$, Elastizitätsmodul $E_{St} = 200 \text{ GPa} = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- Aluminiumstift BD: Durchmesser $d_{Al} = 40 \text{ mm}$, Elastizitätsmodul $E_{Al} = 70 \text{ GPa} = 7.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Querschnittsflächen

$$A_{St} = \frac{\pi d_{St}^2}{4} = \frac{\pi (0.020)^2}{4} = 3.1416 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$
$$A_{Al} = \frac{\pi d_{Al}^2}{4} = \frac{\pi (0.040)^2}{4} = 1.2566 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Tabelle 1: Material- und Querschnittsdaten der Stützen

Stütze	Durchmesser	$E \text{ (Pa)}$	Querschnittsfläche $A \text{ (m}^2\text{)}$
AC (Stahl)	20 mm	2.0×10^{11}	3.1416×10^{-4}
BD (Alu)	40 mm	7.0×10^{10}	1.2566×10^{-3}

1. Kräfteverteilung auf die Stützen

Da der Balken starr ist, gilt das Gleichgewicht:

$$R_A + R_B = P$$

Momentengleichgewicht um Punkt A:

$$R_B \cdot L = P \cdot a \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

Einsetzen der Werte:

$$R_B = \frac{90\,000 \text{ N} \cdot 0.20 \text{ m}}{0.50 \text{ m}} = 36\,000 \text{ N}$$

$$R_A = P - R_B = 90\,000 \text{ N} - 36\,000 \text{ N} = 54\,000 \text{ N}$$

2. Axiale Verformungen der Stützen

Die axiale Verformung einer Stütze ist:

$$\delta = \frac{F \cdot h}{A \cdot E}$$

Für Stütze AC (Stahl):

$$\delta_A = \frac{R_A \cdot h}{A_{\text{St}} \cdot E_{\text{St}}} = \frac{54\,000 \cdot 2.0}{3.1416 \times 10^{-4} \cdot 2.0 \times 10^{11}} = 1.718 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.718 \text{ mm}$$

Für Stütze BD (Aluminium):

$$\delta_B = \frac{R_B \cdot h}{A_{\text{Al}} \cdot E_{\text{Al}}} = \frac{36\,000 \cdot 2.0}{1.2566 \times 10^{-3} \cdot 7.0 \times 10^{10}} = 8.185 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.819 \text{ mm}$$

3. Vertikale Verschiebung im Punkt F

Da der Balken starr ist, ist die Verschiebung linear entlang AB. Für einen Abstand x von A gilt:

$$\delta(x) = \delta_A + \frac{\delta_B - \delta_A}{L} \cdot x$$

Für $x = a = 0.20 \text{ m}$:

$$\delta_F = \delta_A + \frac{\delta_B - \delta_A}{L} \cdot a = 1.718 \text{ mm} + \frac{0.819 \text{ mm} - 1.718 \text{ mm}}{0.50 \text{ m}} \cdot 0.20 \text{ m}$$

$$\delta_F = 1.718 \text{ mm} - 0.359 \text{ mm} = 1.359 \text{ mm} \approx \boxed{1.36 \text{ mm}} \quad (\text{nach unten})$$

4. Allgemeine Formel (ohne Angabe von h)

Falls die Stützhöhe h nicht bekannt ist, kann die Verschiebung allgemein formuliert werden:

$$\delta_F = \left(1 - \frac{a}{L}\right) \cdot \frac{P \cdot b \cdot h}{L \cdot A_{\text{St}} \cdot E_{\text{St}}} + \frac{a}{L} \cdot \frac{P \cdot a \cdot h}{L \cdot A_{\text{Al}} \cdot E_{\text{Al}}}$$

Einsetzen der Werte ergibt für $h = 2.0 \text{ m}$: $\delta_F = 1.36 \text{ mm}$. Für andere Höhen skaliert das Ergebnis linear mit h , z. B. bei $h = 1.5 \text{ m}$: $\delta_F = 1.02 \text{ mm}$.

Zusammenfassung

Die unterschiedliche Steifigkeit der Stützen (Stahl vs. Aluminium) führt zu unterschiedlichen Verformungen. Obwohl der Balken starr ist, entsteht durch die unterschiedlichen Verkürzungen eine kleine Rotation. Die resultierende vertikale Verschiebung im Lastangriffspunkt F beträgt für eine Stützhöhe von 2.0 m :

$$\delta_F \approx 1.36 \text{ mm} \quad (\text{nach unten})$$

In diesem Fall ist das Ergebnis falsch. Nach dem Workflow muss der Rechenweg in drei Stufen auf formale, mathematische und fachliche Fehler überprüft werden.

Rechenweg überprüfen (1 Stufe: Formale Verifikation):

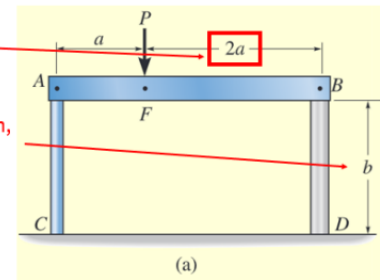
Geometrische und Materialdaten

Gegeben:

- Last: $P = 90 \text{ kN} = 90\,000 \text{ N}$
- Abstand von A zu F : $a = 200 \text{ mm} = 0.20 \text{ m}$
- Abstand von F zu B : $b = 300 \text{ mm} = 0.30 \text{ m}$
- Gesamtlänge: $L = a + b = 0.50 \text{ m}$
- Stützhöhe: $h = 2.0 \text{ m}$ (angenommen, Ergebnis skaliert linear mit h)
- Stahlstift AC : Durchmesser $d_{St} = 20 \text{ mm}$, Elastizitätsmodul $E_{St} = 200 \text{ GPa} = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$
- Aluminiumstift BD : Durchmesser $d_{Al} = 40 \text{ mm}$, Elastizitätsmodul $E_{Al} = 70 \text{ GPa} = 7.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$

Der Abstand von F zu B wird hier falsch übernommen

Die Höhe wird angenommen mit h , obwohl diese mit b gegeben ist



Erneute Eingabe in KI-Chatbot:

Die Abstände zwischen den Punkten A, F, und B sind falsch. Der Abstand zwischen A und F ist a . Der Abstand zwischen F und B ist $2a$. und die Höhe der Stützen ist b . korrigiere deine Rechnung.

Ergebnis beim 2. Versuch:

$$\delta_F \approx 0.23 \text{ mm (nach unten)}$$

Bleibt das Ergebnis weiterhin fehlerhaft, sind die Stufen 2 und 3 iterativ zu durchlaufen, bis ein korrektes Ergebnis vorliegt.

Der Übertragungsfehler hätte außerdem durch entsprechendes Prompting von vornherein verhindert werden können.

5. Aufgabe: Waagerechter Wurf

Ein Sportflugzeug fliegt horizontal mit einer Geschwindigkeit $v = 30 \text{ m/s}$ in 80 m Höhe. Es soll einen Gegenstand auf einen vorgegebenen Zielort am Boden werfen. In welcher horizontalen Entfernung x vor dem Zielort muss man den Gegenstand abwerfen? Rechnen Sie mit $g = 10 \text{ m/s}^2$ und vernachlässigen Sie die Luftreibung. [Quelle](#)

1. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu lösen ist

Die Aufgabe ist schwer zu lösen, weil:

- eine mehrschrittige Berechnung erforderlich ist

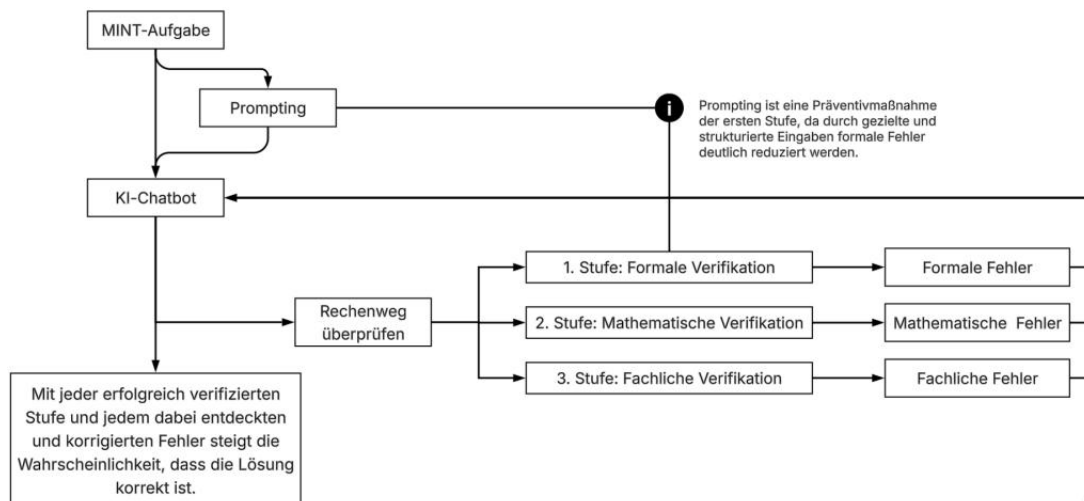
2. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu verifizieren ist

Die Aufgabe ist schwer zu verifizieren, weil:

- Keine Lösung vorliegt

3. Schritt: Fall wählen und Schritte befolgen

Fall C: Workflow befolgen



Eingabe in KI-Chatbot (Ohne Prompting):

Ein Sportflugzeug fliegt horizontal mit einer Geschwindigkeit $v = 30 \text{ m/s}$ in 80 m Höhe. Es soll ein Gegenstand auf einen vorgegebenen Zielort am Boden werfen.
In welcher horizontalen Entfernung x vor dem Zielort muss man den Gegenstand abwerfen. Rechnen Sie mit $g = 10 \text{ m/s}^2$ und vernachlässigen Sie die Luftreibung.

Ergebnis:

Gegebene Daten

Größe	Symbol	Wert
Geschwindigkeit des Flugzeugs (horizontal)	v	$30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Höhe über dem Boden	h	80 m
Erdbeschleunigung	g	$10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Luftwiderstand	–	vernachlässigt

Wir wollen die horizontale Entfernung x bestimmen, die das Flugzeug vor dem Ziel zurücklegen muss, bevor das Objekt losgelassen wird, damit es exakt im Zielpunkt auf dem Boden auftrifft.



1. Fallzeit des Gegenstandes

Der Gegenstand wird aus der Höhe h fallen gelassen, also hat er zu Beginn keine vertikale Geschwindigkeit ($v_{y0} = 0$).

Die vertikale Bewegung ist rein durch die Erdbeschleunigung bestimmt:

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Der Aufprall erfolgt, wenn $y(t) = 0$:

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \implies \frac{1}{2}gt^2 = h \implies t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = \sqrt{\frac{160}{10}} = \sqrt{16} = 4 \text{ s}$$

Fallzeit: $t = 4 \text{ s}$.

2. Horizontale Strecke, die das Objekt während des Falls zurücklegt

Während des Falls behält das Objekt die horizontale Geschwindigkeit des Flugzeugs bei (keine Luftreibung, also keine horizontale Beschleunigung).

$$x = v t$$

$$x = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \times 4 \text{ s} = 120 \text{ m}$$

Rechenweg überprüfen (1 Stufe: Formale Verifikation):

Die Aufgabe wurde korrekt übertragen und richtig interpretiert. Es ist eindeutig, welche Größe berechnet werden soll, sodass inhaltliche oder formale Fehler ausgeschlossen sind.

Rechenweg überprüfen (2 Stufe: Mathematische Verifikation):

Keine mathematische Fehler.

Rechenweg überprüfen (3 Stufe: Fachliche Verifikation):

Die Aufgabe wurde fachlich korrekt gelöst.

1. Fallzeit des Gegenstandes

Der Gegenstand wird aus der Höhe h fallen gelassen, also hat er zu Beginn keine vertikale Geschwindigkeit ($v_{y0} = 0$).

Die vertikale Bewegung ist rein durch die Erdbeschleunigung bestimmt:

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Der Aufprall erfolgt, wenn $y(t) = 0$:

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 = h \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{\frac{160}{10}} = \sqrt{16} = 4 \text{ s}$$

Fallzeit: $t = 4 \text{ s}$.

Für die Bewegungsgleichung in y-Richtung wird die allgemeine Weg-Zeit-Gleichung

$$s(t) = s_0 + v \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2$$

Verwendet.

s_0 ist die Anfangsstrecke bzw. die Anfangshöhe h und daher an dieser Stelle korrekt.

Der Term $v \cdot t$ fehlt in der Gleichung. Dies ist jedoch korrekt, da keine vertikale Anfangsgeschwindigkeit vorliegt und der Term somit gleich null ist.

Der Gegenstand wird durch die Erdbeschleunigung g nach unten beschleunigt, also mit negativem Vorzeichen. Somit ist die Gleichung korrekt.

6. Aufgabe: Flugzeuggeschwindigkeit und -beschleunigung

Für einen kurzen Zeitraum lässt sich der Weg des Flugzeugs wie dargestellt durch die Funktion $y = f(x) = kx^2$ beschreiben. Bestimmen Sie den Betrag von Geschwindigkeit und Beschleunigung des Flugzeugs, wenn es mit konstanter Geschwindigkeit v_0 steigt.



Quelle: Russell C. Hibbeler, Technische Mechanik 3, Dynamik, Beispiel 1.10

1. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu lösen ist

Die Aufgabe ist schwer zu lösen, weil:

- eine mehrschrittige Berechnung erforderlich ist

2. Schritt: Prüfen, ob die Aufgabe leicht oder schwer zu verifizieren ist

Die Aufgabe ist schwer zu verifizieren, weil:

- Keine Lösung vorliegt

3. Schritt: Fall wählen und Schritte befolgen

Fall C: Workflow befolgen

Eingabe in KI-Chatbot (Ohne Prompting):

Für einen kurzen Zeitraum lässt sich der Weg des Flugzeugs wie in Abbildung 1.19a gezeigt durch die Funktion $y = f(x) = kx^2$ beschreiben. Bestimmen Sie den Betrag von Geschwindigkeit und Beschleunigung des Flugzeugs, wenn es mit konstanter Geschwindigkeit v_0 steigt.
 $k_1 = 0,001 \cdot 1/m$, $y_1 = 100 \text{ m}$, $v_0 = 10 \text{ m/s}$

Ergebnis:

Gegebene Daten

$$y = f(x) = k x^2, \quad k = 0,001 \frac{1}{\text{m}}, \quad y_1 = 100 \text{ m}, \quad v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (konstant)}$$

Der Flugzeugpfad ist also eine Parabel.

Wir bestimmen die Größe von **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** an dem Punkt, an dem das Flugzeug die Höhe $y_1 = 100 \text{ m}$ erreicht.

1. Koordinaten des Punktes

$$y_1 = k x_1^2 \implies x_1 = \sqrt{\frac{y_1}{k}} = \sqrt{\frac{100}{0,001}} = \sqrt{1 \cdot 10^5} \approx 3,1623 \times 10^2 \text{ m} = 316,23 \text{ m}$$

2. Tangentiale und normale Richtung

Für die Parabel gilt

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 2k x, \quad y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 2k.$$

Im betrachteten Punkt

$$y'_1 = 2k x_1 = 2 \cdot 0,001 \cdot 316,23 \approx 0,6325.$$

Der **Einheits-Tangentenvektor** ist

$$\mathbf{t} = \frac{(1, y')}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{(1, 0,6325)}{\sqrt{1+0,6325^2}} = \frac{(1, 0,6325)}{\sqrt{1,4}} \approx (0,8452, 0,5345).$$

Der **Einheits-Normalenvektor** (nach rechts, zum Krümmungszentrum) ist

$$\mathbf{n} = \frac{(-y', 1)}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{(-0,6325, 1)}{\sqrt{1,4}} \approx (-0,5345, 0,8452).$$

3. Betrag der Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist konstant vorgegeben:

$$|\mathbf{v}| = v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4. Betrag der Beschleunigung (nur Normalbeschleunigung)

Bei konstanter Geschwindigkeit ist die **Tangententialbeschleunigung** null, die gesamte Beschleunigung ist die **Zentripetal- bzw. Normalbeschleunigung**

$$a = \frac{v_0^2}{R},$$

wobei R der Krümmungsradius ist.

Der Krümmungsradius einer Kurve $y(x)$ lautet

$$R = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}.$$

Einsetzen von $y'_1 = 0,6325$ und $y'' = 2k = 0,002$:

$$R = \frac{[1+(0,6325)^2]^{3/2}}{0,002} = \frac{(1,4)^{3/2}}{0,002} = \frac{1,4\sqrt{1,4}}{0,002} \\ \approx \frac{1,4 \cdot 1,1832}{0,002} \approx \frac{1,6565}{0,002} \approx 8,28 \times 10^2 \text{ m} = 828 \text{ m}.$$

Damit

$$a = \frac{v_0^2}{R} = \frac{10^2}{828} \approx 0,12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Rechenweg überprüfen (1 Stufe: Formale Verifikation):

Hier wird fälschlicherweise angenommen, dass der Betrag der Geschwindigkeit konstant 10 m/s beträgt. In der Aufgabenstellung heißt es jedoch „wenn es mit konstanter Geschwindigkeit v_0 steigt“. Damit ist ausschließlich die Komponente in y-Richtung gemeint, nicht der Gesamtbetrag der Geschwindigkeit.

Erneute Eingabe in KI-Chatbot:

Du hast v_0 fälschlich als konstanten Betrag der Gesamtgeschwindigkeit interpretiert, obwohl laut Aufgabe die vertikale Geschwindigkeit $v_y = v_0$ ist, dadurch sind deine Ergebnisse für v und a falsch

Ergebnis beim zweiten Versuch:

Gegebene Daten

$$y = f(x) = k x^2, \quad k = 0,001 \frac{1}{\text{m}}, \quad y_1 = 100 \text{ m}, \quad v_y = v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (konstant)}$$

Der Flugzeugpfad ist also eine Parabel.

Wir bestimmen die **Beträge** von Geschwindigkeit $|\mathbf{v}|$ und Beschleunigung $|\mathbf{a}|$ im Punkt, an dem das Flugzeug die Höhe $y_1 = 100 \text{ m}$ erreicht.

1. Koordinaten des Punktes

$$y_1 = k x_1^2 \implies x_1 = \sqrt{\frac{y_1}{k}} = \sqrt{\frac{100}{0,001}} = \sqrt{1 \cdot 10^5} \approx 3,1623 \times 10^2 \text{ m} = 316,23 \text{ m}$$

2. Ableitungen der Parabel

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 2k x, \quad y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 2k.$$

Im betrachteten Punkt

$$y'_1 = 2k x_1 = 2 \cdot 0,001 \cdot 316,23 \approx 0,6325, \quad y''_1 = 2k = 0,002.$$

3. Geschwindigkeit

Die vertikale Komponente ist vorgegeben:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Mit der Kettenregel

$$\frac{dy}{dt} = y'(x) \frac{dx}{dt} \implies \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{y'}.$$

Damit

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{10}{0,6325} \approx 15,81 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Der **Betrag der Gesamtgeschwindigkeit** ist

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15,81^2 + 10^2} = \sqrt{350} \approx 18,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

4. Beschleunigung

Da $v_y = 10 \text{ m/s}$ konstant ist, gilt $a_y = 0$.

Für die horizontale Komponente benutzen wir die Ableitung von $v_x = dx/dt$:

$$v_x = \frac{v_0}{y} = \frac{v_0}{2kx}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_0}{2kx} \right) = -\frac{v_0}{2k} \frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt}.$$

Einsetzen von $v_0 = 10 \text{ m/s}$, $2k = 0,002$, $x_1 = 316,23 \text{ m}$ und $\frac{dx}{dt} = v_x = 15,81 \text{ m/s}$:

$$a_x = -\frac{10}{0,002} \frac{15,81}{(316,23)^2} = -5000 \frac{15,81}{100,000} \approx -0,79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Somit

$$a_y = 0, \quad a_x \approx -0,79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Der **Betrag der Beschleunigung** ist daher

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \approx 0,79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Die Beschleunigung wirkt ausschließlich in horizontaler Richtung (gegen die Bewegungsrichtung des x -Anteils) und sorgt dafür, dass die horizontale Geschwindigkeit abnimmt, während die vertikale Geschwindigkeit konstant bleibt.

Rechenweg überprüfen (2 Stufe: Mathematische Verifikation):

Keine mathematischen Fehler.

Rechenweg überprüfen (3 Stufe: fachliche Verifikation):

Keine fachlichen Fehler.